蕭文強,《1,2,3,…以外》,廣東教育出版社(1990);修訂本,香港三聯書局(1993);臺北書林(1994).

第五章　從方程到羣的故事

(1983年6月——香港科學館科普講座)

在前幾章裏，我們看到數學發展的一些片段和它們的應用，但都與實數複數有關，特別是用到數的連續性。但有不少問題，涉及的是一些離散的結構，最簡單的是用來數東西的自然數，以至今天近世數學的羣、環、域等代數結構，五花八門，使人眼花繚亂。在這一章裏，我們只選了一個最基本的概念，看看它究竟是個什麼東西？怎樣發展起來的？這就是羣的概念。

1. 從自動排信機談起

讀者一定寄過信吧？信到了郵局，按種類大小分開，讓我們只考慮普通信件，它們每封的形狀和大小都差不多，把它們疊齊，便可以蓋郵戳了。但還有一個小問題，有些信件可能被倒轉放，有些被翻轉放，貼郵票的角落(信封正面右上角)不一定全落在同一位置上。我們必須設法排好信件，使每封信的郵票都落在正面右上角，以便蓋郵戳。怎麼辦呢？每一封信的郵票可能落在四個位置，標作(1)正面右上角、(2)反面右下角、(3)正面左下角、(4)反面左上角(圖5.1)。為了省錢，探測郵票的感應器是固定的，只探測信的

正面右上角，我們必須把信移動，務求四個位置也兼顧到。要由(1)得(2)，只需把信繞着一條橫中綫轉180度，記這個移動作H；要由(1)得(3)，只需把信繞着中心轉180度，記這個移動作R；要由(1)得(4)，只需把信繞着一條縱中綫轉180度，記這個移動作V；為了方便以後的敍述，我們多添一個移動，記作I，即是不動，由(1)得(1)(圖5.1)。每一封信來到探測感應器面前，它先看看郵票是否在正面右上角，在的話信便從另一條輸送帶運走，不在的話便對信施以移動H，再看看郵票是否在正面右上角；在的話信便從另一條輸送帶運走，不在的話便對信施以H，把信回復原來的位置，然後施以R，再看看郵票是否在正面右上角；在的話便從另一條輸送帶運走，不在的話便對信施以R，把信回復原來的位置，然後施以V，現在郵票一定是在正面右上角了，除非貼郵票的人不按慣例卻胡亂貼上郵票(圖5.2)。你察看

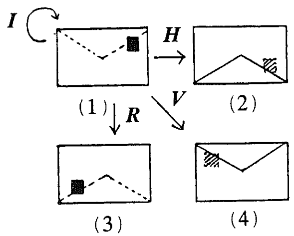

圖5.1

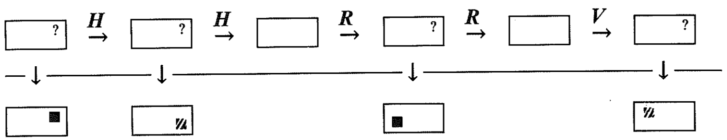

圖5.2

一下，便知道其實不必作那麼多移動的，譬如先作H再作R，效果等於只作V；同樣地，先作R再作V，效果等於只作H。所以，剛才的過程可減縮成三步(圖5.3)，這樣辦還有另一個好處，就是避免了使用某種移動。譬如在實際機械操作方面，R較V或H來得複雜，第二個方法便避免了使用R，有些郵局的自動排信機，真的採用第二種方法呢。

請讀者留意的倒不是排信的操作過程細節，而是那四個移動I、R、V、H之間的結合關係。什麼叫做結合關係呢？先作某個移動，接著作某個移動，效果是否等於只作某個移動呢？是哪一個？這些答案便描述了它們之間的結合關係，最清晰的表達方式是列一個表。請看下面的表(圖5.4)，行表示先作的移動，列表示接着作的移動，例如先作V再作R，效果等於只作H，簡寫為$RV=H$。

讓我們轉看另一個事例，驟看去與剛才說的風馬牛不相及，是電腦的循環式儲存器的存取控制。簡單地說是這樣的

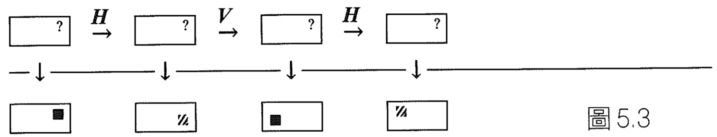

圖5.3

	I	R	V	H (先做)
I	I	R	V	H
R	R	I	H	V
V	V	H	I	R
(後做) H	H	V	R	I

圖5.4

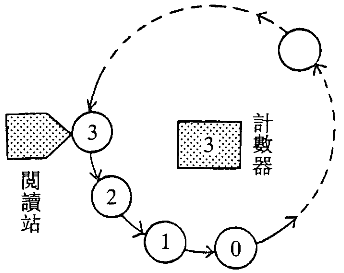

圖 5.5

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

圖 5.6

一回事，假設只有四個儲存器，循環地轉動，如果你要取儲存在某個儲存器的資料，必須等到那一個儲存器轉抵閱讀站時方能把它取出來抄寫(圖 5.5)。有一具計數器負責紀錄儲存器抵達閱讀站的情況，譬如說開始時 0 號在閱讀站，計數器顯示 0，以後每轉一次，計數器便加一。所以，當 1 號抵閱讀站時，計數器顯示 1；當 2 號抵閱讀站時，計數器顯示 2；…。且慢，這樣加下去，轉四次後計數器豈不是顯示 4 嗎？轉五次後計數器豈不是顯示 5 嗎？但我們需要顯示的卻是 0(號)和 1(號)呀，那怎辦？因此，計數器採用的加法不能是普通的加法，而是一種叫做模 4 加法，即是按普通加法得到答案後，把它除以 4，餘數才是需要的答案。例如 $2+3=1$，即是說從 0 開始轉了 2 次後再轉 3 次，1 號抵閱讀站。讓我們寫下模 4 加法表(圖 5.6)，這也描述了一種結合關係，就是 0、1、2、3 之間的結合關係。注意到這個表跟上一個表有不同的結構，意思是說即使你把 I、R、V、H 換作 0、1、2、3(不一定順次序)，把前一個表重抄，也決不會得到後一個表，原因是在前一個表裏，每個元素與自身的結

合，總得到同一個元素(是 I)，但在後一個表裏，可沒這個現象。

不過，我們亦不應只見其異不見其同，近代數學的一個趨勢正是要尋找個別數學對象之間有沒有相同的基本性質，好便建立統一的處理方法。我們再看一看，上面兩種結合關係有沒有相同的地方。首先，一個明顯的相同點，是大家都有這樣的性質：任何兩個元素的結合，得來的總是其中一個元素。其次，大家都有一個很特別的“不動”元素，它跟任何元素結合，得來的總是那一個元素自己(在前一個例子就是 I，在後一個例子就是 0)，我們把這樣的元素叫做單位元。再仔細看，每個元素總有一個把它“還原”的元素，跟它結合後得到單位元(在前一個例子，H 把 H 還原；在後一個例子，3 把 1 還原)，我們把這樣的元素叫做那個元素的逆元(H 是 H 的逆元，3 是 1 的逆元)。最後，有一個不容易從表中看出來的規律，但當你試把一連串的元素結合時，你自然希望有這樣的性質：如果把三個元素按次結合，你可以先把頭兩個結合，得來的元素與第三個結合；你也可以先把後兩個結合，再用頭一個跟這兩個結合得來的元素結合。如果這兩個做法得來不同的答案，那多尷尬呀！在上面兩個表裏，這是不會發生的；兩種做法得到同樣的答案，例如考慮 R、V、V 按次結合，你可以先 R 後 V 得 H，然後先 H 後 V 得 R；你也可以先 V 後 V 得 I，然後先 R 後 I 得 R，答案是一樣。這就是我們要說的規律，叫做結合律。

凡是一堆元素，它們之間有某種結合關係，滿足以下三個簡單條件，即是(i)有單位元，(ii)每個元素有逆元，(iii)

結合律成立，我們便説它們組成一個羣。上面兩個例子都是羣，因為兩個都只有有限個元素，故稱有限羣。如果有無限多個元素，但滿足以上條件，便叫做無限羣，譬如對加法來説，全部整數組成一個無限羣。上面兩個有限羣都享有一個很好的性質，即是結合與次序無關，例如先R後V是H，先V後R也是H；先1後2是3，先2後1也是3。這樣好的性質，卻不是任何羣都享有的，讓我們看一個沒有這種性質的羣吧。把四粒不同顏色的珠嵌在一個正方形的角落，共有多少個不同的圖案（圖5.7）？答案可不是24，因為雖然好像共有24個不同的擺法，其中有不少是相同的，只要把正方形作適當移動，便可以從一個得到另一個了。要計算真正有多少個，必須先數數有多少個移動，把一個正方形轉到一個處於相同位置的正方形？例如把它繞中心（逆時針方向）轉90度，就是一個這樣的移動，記作r；轉180度，也是一個這樣的移動，記作s；還有轉270度，記作t；轉360度，等於不動，記作e。此外，繞縱中綫轉180度，記作v；繞橫中

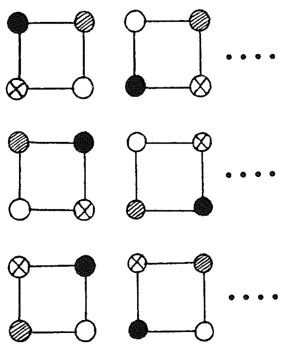

圖5.7

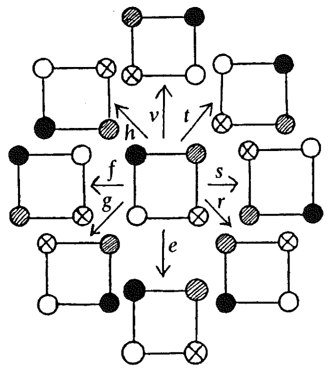

圖5.8

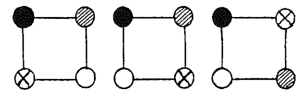

圖5.9

	e	r	s	t	v	h	f	g（先做）
e	e	r	s	t	v	h	f	g
r	r	s	t	e	f	g	h	v
s	s	t	e	r	h	v	g	f
t	t	e	r	s	g	f	v	h
v	v	g	h	f	e	s	t	r
h	h	f	v	g	s	e	r	t
f	f	v	g	h	r	t	e	s
（後做）g	g	h	f	v	t	r	s	e

圖5.10

綫轉180度，記作h；繞一對角綫轉180度，記作f；繞另一對角綫轉180度，記作g。共有八個這樣的移動，每一個嵌法經這八個移動得到八個貌似不同的圖案（圖5.8），所以真

正的答案是$^{24}\!/_8=3$，不難畫下那三個真正不同的嵌法(圖5.9)。讓我們也列表說明e、r、s、t、v、h、f、g之間的結合關係(圖5.10)，這也是一個羣，但結合次序不同卻可能得來不同的結果，就像先r後v得g。但先v後r卻得f。不過，結合律當然還是成立的，例如r、v、h按次結合，若先r後v得g，然後先g後h得t；但也可以先v後h得s，然後先r後s得t。請讀者再留意一樁事，這個羣藏有一個與模4加羣的結構相同的羣在內，即是e、r、s、t這四個元素。它們組成一個羣，如果你把這四個元素分別喚作0、1、2、3，便與模4加羣一式一樣了。

2．解方程的故事

羣是近世抽象代數裏的一個重要概念，不要看它是這麼簡單，它已經滲透至其它數學領域，成為貫穿整個數學學科的一個主要思想，並且在其它學科和現代科技上有廣泛應用。我們在第三節再回頭談談那方面，現在我想告訴讀者，這個重要而且年青的數學概念(它只有一百五十年左右的歷史)原來產生自一個有數千年歷史的古典問題，就是大家一定學過的解代數方程問題。

大家在中學裏一定跟方程打過交道，例如一元一次方程、一元二次方程、二元一次聯立方程、等等。所謂一個一元N次方程就是形如$a_N x^N+a_{N-1}x^{N-1}+\cdots+a_1 x+a_0=0$的代數式，那些$a_N$、$a_{N-1}$、$\cdots$、$a_1$、$a_0$叫做方程的係數(通常都是實數)。並非任意$x$能使這個等式成立的，就像$x=2$並不使$x^2-2x-3=0$成立，但$x=3$卻使它成立。使等式成立的$x$便稱為那個方程的根，解那個方程就是尋找它所有的根。在古代，人們對數的認識還不全面，往往只要找到一個(正數)根便滿足了。三千多年前埃及人已經基本上懂得解一次方程，當然他們不是用現代的術語和表述形式，不如看一道題目吧，是著名的《萊因紙草卷》的第二十六題：一個數量和它的四分一是十五，該數量是多少？作者運用“假借法”，先設答案是4，四分一是1，加起來是5，但這跟已知條件不符(應是15)，需作調整；因為5的三倍是15，4的三倍是12，所以答案是12。他們其實解了$x+{}^{x}\!/_{n}=N$這類方程，最後的答案相當於$x=nN/(n+1)$。埃及人還有些零星記載，相當於解了某些二次方程，但有系統的算法，應歸功於稍後的巴比倫人。古代巴比倫人也不是用現代的術語和表述形式，讓我們也看一道題目吧，那是一塊博物館編號叫AO8862的泥板，上面寫着：“長、闊，把長乘闊得面積，面積加上長與闊的差別，得一百八十三，而長加闊是二十七，求長、闊、面積。”雖然用的是幾何語言，這道題目的用意顯然是解方程，因為長度加面積沒有幾何意義的。接着的解說，相當於以下的做法(為了方便閱讀，用了現代記法)：長是x，闊是y，面積是xy，得方程(1)$x-y+xy=183$，(2)$x+y=27$。兩者相加，得$x(2+y)=210$，而第二個方程可寫成$x+(2+y)=29$。改稱x作X，$y+2$作Y，得聯立方程$X+Y=29$，$XY=210$。這類方程是巴比倫人的拿手好戲，他們有個一般的算法，若$X+Y=b$，$XY=c$，取b的一半自乘後減掉c，開方，再加上b的一半，答案是X(或

Y)。用公式寫下來，就是$X=b/2+\sqrt{(b/2)^2-c}$。讀者不妨把二次方程$X^2-bX+c=0$的解與這個答案比較，便知道為什麼我們說巴比倫人基本上解了二次方程了。巴比倫人的做法，靈感大概是源於幾何思想的，試看下面的矩形$ABCD$(圖5.11)，把AB延長至E使$BC=BE$，再取AE的中點M，豎立正方形$MEFG$。因為$X=b/2+e$，$Y=b/2-e$，而XY是矩形面積，也是從大正方形減掉劃上斜綫的小正方形(為什麼？)，所以$XY=(b/2)^2-e^2$，即是$c=(b/2)^2-e^2$，所以$e=\sqrt{(b/2)^2-c}$，故$X=b/2+\sqrt{(b/2)^2-c}$。這種基於幾何思想的解法，過了一千年後，在古代希臘數學家手裏，運用得更加純熟。公元前四世紀歐幾里德的《原本》卷二裏記載了不少與此有關的定理，我們不能逐一細說了，不如飛掠九百多年，踏入公元七世紀繼續我們的故事吧。

公元七世紀初，穆罕默德(Mohammed)在麥加創立了伊斯蘭教，在622年遭迫害出走至麥地那建立神權國家，在短短十年間統一了阿拉伯半島。穆罕默德在632年逝世，他的繼任人在不到半個世紀內征服了從印度至西班牙，包括南

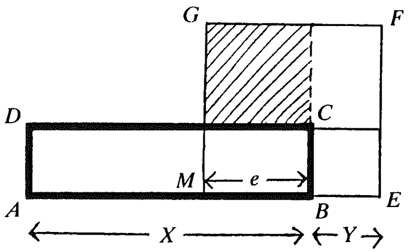

圖5.11

意大利和北非的大片土地，建立了一個橫跨歐、亞、非三洲的大帝國。在當時的世界，只有唐代的中國堪與比擬，中國史書上稱它作大食國，也稱天方。到了750年，阿拉伯帝國分裂為二，東部王國定都巴格達，中國史書稱它作黑衣大食，因為他們的朝旗尚黑色；西部王國定都哥多瓦，中國史書稱它作白衣大食，因為他們的朝旗尚白色。東部王國的阿拔斯(Abbasid)王朝是阿拉伯的極盛時代，巴格達成為當時世界著名的商業城市和文化中心。

雖然阿拉伯回教徒在征戰初期充滿宗教狂熱，鐵騎所至，大肆破壞掠奪，但等到征戰完成，他們卻又很快定居下來，創造他們的文化，很快便關心藝術和科學。他們對別的種族和教派是寬大的，廣泛搜羅人材，注譯古希臘和古印度的文獻，吸收外來文化之長，把它發揚光大，傳播於四方。1258年成吉思汗的孫子旭烈兀率領蒙古鐵騎攻陷巴格達，把阿拉伯文明摧毀殆盡，建立了伊兒汗國。到了1492年，西班牙人收復了西部的阿拉伯王國，於是阿拉伯帝國退出了歷史舞臺。但阿拉伯文化卻沒有消失，因為古代東西方文化是經由它的保存發展，才能在十二世紀後漸漸傳入當時文化極度衰落的西方，讓它在以後幾個世紀裏開花結果。歷史往往充滿矛盾和諷刺，阿拉伯帝國崛起，摧毀了當時古代世界的文化，據云641年亞歷山大港城陷時，當地的著名圖書館被摧毀，統治者下令焚毀全部藏書，以致城裏的浴堂，用羊皮書燒水，達六個月之久！但後來它卻成為文化守護神，為延續世界文化立下不朽的功績。要注意一點，阿拉伯文化這個名詞並不貼切，叫做伊斯蘭文化是較適合，因為建立這文

化的人，不單是阿拉伯人，還包括希臘人、波斯人、印度人和西方的基督徒。只不過當時帝國裏通行阿拉伯文，各種著作都是以阿拉伯文書寫的。

阿拔斯王朝的第五代統治者阿爾·馬蒙(Al Mamun)極力提倡文化科學，在巴格達創立了一所科學研究機構，稱為“智慧之殿”，聘請了很多學者在那兒工作。其中有位數學家天文學家，名叫花拉子模(Al-Khowarizmi)，寫了不少重要的數學著作，他曾寫了一本算術書，書名有他的名字，後來譯作拉丁文變成Algoritmi，再輾轉變成Algorithm，即是今天算法的英文詞。他在830年左右寫了另一本書，書名是《Hisab Al-Jabr Wal Muquabalah》，這裏的Al-Jabr原意是復原，muquabalah原意是對消。前者大抵指方程中一邊減掉一項必須在另一邊加上那一項，使它恢復平衡；後者大抵指方程中兩邊相同的項給消去或者在一邊中同類項給合併。這本書是討論怎樣解方程的，後來第二個字漸漸被人遺忘，但第一個字譯作拉丁文後，輾轉變成algebra，就是今天代數的英文詞。

花拉子模把方程分成六種，即是$x^2=bx$(平方等於根)、$ax^2=c$(平方等於數)、$bx=c$(根等於數)、$x^2+bx=c$(平方與根等於數)、$x^2+c=bx$(平方與數等於根)、$bx+c=ax^2$(根與數等於平方)，然後逐一討論解法。讓我們看一個例子：“平方與十個根等於三十九。”他的方法是取根的一半，是5，自乘得25，把這個數加上39得64，開方得8，從這個數減掉根的一半，即是從8減掉5，餘3，便是答案。用今天的記法，如果方程是$x^2+bx=c$，他的公式便是$x=\sqrt{(b/2)^2+c}-(b/2)$，讀者不妨把二次方程$x^2+bx-c=0$的解與這個答案比較一下。接着，他用幾何圖形證明這個公式，生動形象地說明了大家在中學熟知的“配方”手法(圖5.12)。我們比花拉子模多了一千年見識，不必為了使用圖形解釋和迴避負數而把方程分成六種，我們懂得使用代數計算一勞永逸地解決一般二次方程，但看看花拉子模的圖形解釋，也許能把“配方”明白得更好呢。

中世紀的西方學者通過阿拉伯文化承受了前人的數學遺產，引起他們對數學的興趣，導致其後西歐的數學發展。我們將再飛掠六百多年進入文藝復興期的意大利繼續我們的故事，但未繼續之前，讓我們回過頭來看看世界另一邊一個古老大國對方程的研究，那就是我們的祖國了。

方程一詞，最先見諸秦漢古籍《九章算術》，是第八章的名稱。古代中國的方程，專指今天的綫性方程組，和現代用的方程一詞意義有別。劉徽注《九章算術》時說過：“程、課程也。羣物總雜，各列有數，總言其實。令每行為率，二物

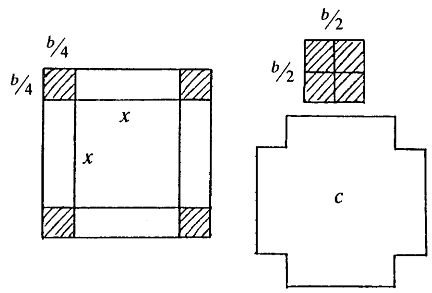

圖5.12

$$(x+b/2)^2=(b/2)^2+c$$

者再程，三物者三程，皆如物數程之，並列為行，故謂之方程。”這裏的“課”與課分的“課”意義相似，有比較的意思，“程”是表達的意思，“方”是指以算籌列方陣表示，整段話說明了以方陣表達式計算綫性方程組，相當於今天的矩陣消元法，比西方的發現早了一千五百多年。(為了使用這種方法，勢必引入負數的概念和運算，比印度早了幾百年，比西方又早了一千五百多年！)至於今天的方程一詞，是借用來譯英文的equation(拉丁文是aequatio，有相等的意思)，在清初那是譯作相等式，到了1859年李善蘭與英國人偉烈亞力合譯棣摩甘的《代數學》時把它譯作方程。這本《代數學》是西方近代代數學的第一本中文譯本，代數名稱由此而來，後來華蘅芳和英國人傅蘭雅(Fryer)在1873年合譯華里司(Wallace)的《代數術》時，卷首說：“代數之法，無論何數，皆可任以何記號代之。”

在清帝愛新覺羅・玄燁(康熙)的大力支持下，中國在1723年出版了一部五十三卷的數學百科全書，名《數理精蘊》。康熙帝是中國歷史上一位英明能幹的君主，對數學和自然科學有極大興趣，除了派人編譯許多數學科學書籍外，還自己動手學習數學科學，對一位封建君主來說，那是罕見的。《數理精蘊》把當時已傳入或新傳入的西洋數學編排整理，對中國古代數學(當時仍有傳本的)進行了比較研究，範圍包括當時各門數學知識。書的下編卷三十一至三十六叫做“借根方比例”，首段說：“借根方者，假借根數方數以求實數之法也。”就是說以未知數和它的各次乘方列為方程再解它，也就是當時傳入中國的西洋代數。例如卷三十三的一題

說：“平方＋二根＝二四”，即是求$x^2+2x=24$的正根，叫做開帶縱平方。《數理精蘊》的主要編纂者梅瑴成後來寫了一篇文章說：“供奉內廷蒙聖祖仁皇帝授以借根方法，且諭曰西洋人名此書為阿爾熱八達，譯言東來法也。敬受而讀之，其法神妙，誠算法之指南。而竊疑天元一之術頗與相似，復取《授時歷草》觀之，乃渙如冰釋，殆名異而實同，非徒日似之已也。”什麼是“天元一之術”呢？

原來中國數學家在傳統數學基礎上發展新的代數方法，在宋元之際(十二至十三世紀)達到高峯，代表人物是秦九韶、李冶(後改名為李治)、楊輝、朱世傑。在中國古代，解方程叫做開方術，因為所有解法都與《九章算術》的開平方、開立方等方法一脈相承的。北宋時賈憲創立增乘開方法，為此引入開方作法本源圖，即是隔了六百多年後在西方出現的帕斯卡(Pascal)三角(圖5.13)。秦九韶把這種方法推廣成為解一般高次方程的數值方法，相當於隔了七百年後在西方出現的魯非尼——霍納(Ruffini—Horner)法。秦九韶著有《數書九章》，其中卷八第五題竟涉及一條十次方程$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$，並解得一個根是$x=3$呢！運用方程解實際問題分兩個步驟，第一步是根據題意列出一條包括未知數和它的乘方的方程，第二步是解這條方程。剛才提到的只是第二步工夫，在沒有完善符號和記法之前，第一步工夫可非輕而易舉的，今天只要唸過初中數學的人便曉得這步工夫，應該感激前人的努力呢！中國宋元數學家創立的天元術，就是這第一步工夫，在西歐又得過了三百多年後才發現。讓我們舉李冶的《益古演段》其中一題為例：

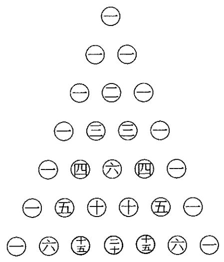

圖 5.13

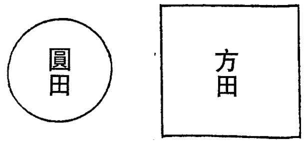

圖 5.14

“今有方圓田各一段共計一千四百五十六步，只云方周大如圓周，方圓周共相和得二百步，問二周各多少？”(圖 5.14)。他的方法是“立天元一為圓周”，用今天的寫法，就是設x為圓周，然後他按題意列出方程，再把代數式化簡，得到二次方程 $7x^2-1200x+120000=69888$(今天的寫法)，並解得 $x=72$，故方周是一百二十八步，圓周是七十二步(讀者可試列式，取 $\pi=3$)。後來朱世傑更把這種方法推廣到二元、三元以至四元的高次聯立方程組，寫成《四元玉鑑》一書。

很可惜，這些光輝成就，沒有受後人重視，自宋元以後，中國數學衰落，很多數學古籍失傳，數學工作遭受忽視。數學不只沒有進一步的發展，就連已有的成就也被遺忘，到了明清，竟然沒有什麼人了解增乘開方法和天元術了！直至梅瑴成因編纂《數理精蘊》涉獵中西數學才會發出以上那一番話。他發現西洋方法在中國古代早已有之，在整理祖國數學文化遺產方面，是一大貢獻，但他以為西洋代數方法(“阿爾熱八達”即algebra的音譯)源於天元術，並且還

説：“猶幸遠人慕化，復得故物。東來之名，彼尚不能忘所自。”則未免是囿於民族感情，陶醉於“天朝自居”的武斷説法了。雖然宋元期間中國和阿拉伯肯定有數學文化上的交流，但阿拉伯的代數方法比這還早幾個世紀已出現了，西歐自阿拉伯學來代數，故稱“東來”。

中國數學自宋元後衰落，當時的社會是一個主要因素。明朝(1368–1661年)是中國歷史上一段黑暗時代，明代君主從明太祖朱元璋起便搞專制政治，設立錦衣衛、東廠、西廠、內廠這等“秘密警察”機關；又任用宦官專權，以詔獄、廷杖、文字獄來蹂躪人權；又以八股文開科取士，禁錮獨立思考，做成文化淤塞。宋元的光輝數學傳統，經歷明朝後蕩然無存實不足為怪。反觀同時代的西歐，正值文藝復興期，無論在領土、思想、學術各方面都不斷擴張和進步；人們思想開放，視野遼闊，與當時的中國成一強烈對比。當時的意大利是個文化中心，我們的故事便從那裏繼續。

意大利的波倫那大學是西方最古老的大學，成立於1088年，到了1500年左右，那裏的一位數學教授達費羅(Scipione Del Ferro)解了 $x^3+ax=c$ 這類型的三次方程。早些時候，另一位著名數學家巴巧利(Pacioli)還聲稱三次方程不可解，就像化圓為方一樣困難！達費羅沒有發表他的方法，只把它透露給他的學生菲俄(Fior)和女婿那發(Annibale Della Nave)。這是當時的風尚，數學家常常把自己的發現保密，以便向對手挑戰，要他們解同樣的問題，藉此拿取獎金，而且大學聘任教授也視競賽結果而定的。如果不是有另一位意大利數學家上場，這個“秘方”也就如此保密

下去了。這位數學家叫做豐坦那(Niccolo Fontana)，也稱塔塔利亞(Tartaglia)，意即口吃者。他年幼時正值意法交戰，法軍攻陷了他的家鄉布里西亞，大肆殺戮，他的父親帶着他藏身寺院裏，仍難倖免，父親被殺，他自己的頭部和下顎受重傷，法軍以為他死了便丢下他。後來他的母親找着他，當時兵荒馬亂，無處就醫，母親想到狗負傷時舔傷口的做法，便照着做，竟把他救活過來，但他因受傷過重，癒後便成了口吃。塔塔利亞出身貧困，身體又有缺陷，但他意志堅強，勤奮聰敏，努力自學。學校自然沒辦法上，就連紙筆也買不起，母親在墳場的墓碑上教他認字計算，苦學成才，終於成為十六世紀的一位出色的數學家。

在1530年左右，塔塔利亞宣稱他懂得解某類型的三次方程，菲俄聽到自是不服氣，大家相約在1535年2月22日在米蘭大教堂舉行競賽。塔塔利亞知道菲俄原來身懷"秘方"後便着急起來，因為他知道自己的方法仍欠完善。於是他經常徹夜不眠，苦思更佳的方法。據説在2月12日晚上，他的思路忽地豁然開朗，想出了解三次方程的良方。果然到了競賽的日子，兩人各出三十道題，塔塔利亞擬的題是各式各樣，菲俄做不到；而菲俄恃着身懷"秘方"，擬的三十道題全是解三次方程，塔塔利亞輕易地一一解答了。接着，另一位意大利數學家上場，使我們的故事峯迴路轉，他就是卡當(Cardano)，是數學史上最富傳奇色彩的一位人物，集數學家、醫生、占星術士、賭徒、騙子、流氓於一身！卡當以介紹塔塔利亞覲見某貴族王公為餌，在1539年把塔塔利亞引到自己的居所，好好款待他，再三乞求他把三次方程的解法

傳授予自己。卡當還立下誓言，決不洩密，結果塔塔利亞果真傳授了該方法予他。卡當在1545年出版了著名的《大術》，裏面出現了三次方程的解法，所以後世的人多數把三次方程解公式稱作卡當公式，塔塔利亞的名字反倒湮沒無聞！當時塔塔利亞對這種背信棄義的行為自然憤怒不已，便向卡當挑戰，卡當只派學徒斐拉里(Ferrari)應戰，終於雙方謾罵中不了了之。卡當也有這樣的辯白，他説後來那發告訴他塔塔利亞的方法跟達費羅的方法是一樣的，所以塔塔利亞可不是第一個發現解法的人，他把解法公開也就不算是背棄誓言了！事實上，卡當在《大術》第十一章的確説過："大約三十年前，波倫那的達費羅發現這一法則，並傳授予威尼斯的菲俄，菲俄曾和布里西亞的塔塔利亞競賽，後者也發現了這一方法。塔塔利亞在我的懇求下把方法告訴我，但沒有給出證明。在這種幫助下我找到幾種證法，它是非常困難的，現縷述如下。"雖然卡當是位聲名狼藉的人，但在這一樁事上他的做法卻未可厚非。把數學知識保密，視作私人財產以求名利，是不可饒恕的行為，卡當把它公諸於世，並且交待清楚，對塔塔利亞和達費羅的功勞給予應份的承認，那是正確的做法。

讓我們看看卡當公式，以 $x^3+mx=n$ 為例，他求得一個根是：$x=\sqrt[3]{\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}+(n/2)}-\sqrt[3]{\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}-(n/2)}$。他用幾何圖形證明，頗富趣味，是"配方"手法的三維推廣。在下面的立方裏(圖5.15)，以 AB 為邊的立方等於以 AC 為邊的立方減掉以 BC 為邊的立方再減掉三個以 AB、AC、BC

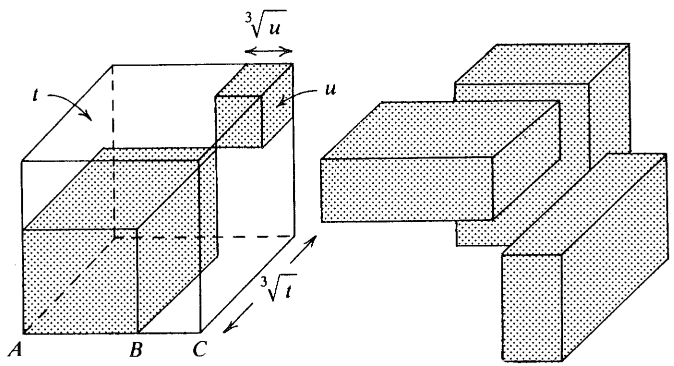

圖5.15

為邊的長方體，也就是說 $(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3=t-u-3(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}$，其中 t 和 u 分別是大小立方的體積。移項得 $(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3+(3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u})(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})=t-u$。若置 $t-u=n$ 和 $tu=(m/3)^3$，並比較一下原來的三次方程，便知道 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ 是一個根了。但從上面那兩個式可以得到一個二次方程，它的解就是 $t=\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}+(n/2)$ 和 $u=\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}-(n/2)$（可比對一下巴比倫人的解法），由此即得卡當公式。為了更好理解三次方程的解，讓我再介紹一個大同小異的做法，是法國數學家韋達(Vieta)在1591年發表的，解 $x^3+mx=n$，設 $x=T-U$，故 $(T-U)^3+m(T-U)=n$，即是 $T^3-U^3+(m-3TU)(T-U)=n$。再設 $m=3TU$，便得 $T^3-(m/3T)^3-n=0$，即是 $T^6-nT^3-(m/3)^3=0$，叫做原來方程的預解方程，雖然它看來是個六次方程，實質上它只是 T^2 的二次方程，所以根是 $T^3=(n/2)\pm\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}$。如果取 T 是 $\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}+$

$(n/2)$ 的一個立方根，則從預解方程中可知 $U=m/3T$ 是 $\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}-(n/2)$ 的一個立方根，因此得卡當公式。到了1732年歐拉才指出三次方程應該有三個根，並且把它們全部寫下來。仍然叫 $t=\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}+(n/2)$ 和 $u=\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}-(n/2)^3$，它們的立方根分別是 T、ωT、$\omega^2 T$ 和 U、ωU、$\omega^2 U$，這裏的 $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$ 是本原單位根。要寫下三次方程的三個根，必須從每組選一個，使兩者的乘積是 $m/3$，共有三對，即是 $x_1=T-U$，$x_2=\omega^2 T-\omega U$，$x_3=\omega T-\omega^2 U$。於是，不論是一次、二次或三次方程都有解式，即是能光靠四則運算和開方根運算把方程的根表成係數(和某些常數)的關係式，我們說這樣的方程是可以根式求解，簡稱可解。(必須在這裏區別清楚可解和有解，我們在第七章裏將要提到任何 N 次方程有解，這個叫做代數基本定理。現在討論的卻是另一個問題，就是能否寫下一個求根的公式，只涉及係數和某些常數，使用的運算只限於加、減、乘、除和開方根。同樣理由，高次方程的數值求解法也不是我們要討論的事項。)

一次、二次、三次方程都是可解的，斐拉里在十六世紀找到四次方程的解式，卡當在《大術》裏也有敍述。於是，數學家向五次方程進軍，經過二百多年還是徒勞無功。這方面的突破來自法國數學家拉格朗日(Lagrange)在1770年左右的工作。他採用一個全新的觀點和途徑，先考察前人解二次、三次、四次方程的辦法，試找出成功的關鍵，希望利用這個共同點求高次方程的解。仍然以 $x^3+mx=n$ 為例，它的三個根是 $x_1=T-U$、$x_2=\omega^2 T-\omega U$、$x_3=\omega T-\omega^2 U$，T 和

U分別是某數的立方根。拉格朗日正確地意識到預解方程 $T^6-nT^3-(m/3)^3=0$ 的重要，注意到這個方程的六個根是 T、ωT、$\omega^2 T$、$-U$、$-\omega U$、$-\omega^2 U$。他獨具慧眼，知道重要的倒不是如何把x_1、x_2、x_3寫成那六個根的關係式，而是如何把那六個根寫成x_1、x_2、x_3的關係式。他發覺那是辦得到的，例如$T=(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)/3$（這是由於$\omega^2+\omega+1=0$），而且只要把那三個根調換，便能得到預解方程的全部六個解了。例如把x_1換作x_3、x_2換作x_1、x_3換作x_2，便把$(x_1+\omega x_3+\omega^2 x_3)/3$變成$(x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2)/3=\omega T$了。我們把以上的置換記作$\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}$，類似的置換共有六個，每個對應於預解方程的一個根。這是一個重要的信息，説明了根的置換與解方程有密切關係。同時這也顯示了現代數學的一個特點，古典數學風尚營營役役，但求一解，但現在我們還未知道每個根是什麼樣子，卻一下子便考慮全部根組成的集合，豈不是有點想入非非嗎？現代數學便是這樣着眼於全局，從一般情況入手，看似抽象，卻終於導致具體情況的答案呢，讀者看下去便知道了。拉格朗日注意到$(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3/27$經六個置換變來變去只取兩個不同的值（即是$T^3$和$-U^3$），這解釋了為何預解方程雖然是$T$的六次方程，實質只是$T^3$的二次方程，故方程可解。以同樣想法，他利用四個根的全部二十四個置換去解釋四次方程可解的道理，他發現雖然預解方程是x的二十四次方程，實質只是x^4的六次方程，而且它還可以化為兩個三次方程，因而可解。由此他擬就一套一般程序，希望把高次方程逐步化作更低次數的方

程的情況，如果成功，高次方程也就可解了。但當他把這套程序用在五次方程上，卻碰到一個x的一百二十次方程，實質是x^5的二十四次方程，他不懂得怎樣做下去。不過，他卻因而隱約感覺到高次方程不一定是可解的。

魯非尼在1813年發表了一般的五次方程不可解的證明，但證明並不完善，到了1826年挪威數學家阿貝爾（Abel）才給出一個正確的證明。我們説一般的五次方程不可解，卻不是説所有五次方程不可解，例如可以證明$2x^5-5x^4+5=0$不可解，但$x^5-1=0$卻是可解的。最終的答案由法國數學奇才伽羅華（Galois）在1832年給出，理論上他總能判斷一個方程是否可解的。

阿貝爾和伽羅華都是優秀的數學家，他們在數學上的貢獻名留青史，但他們兩個都命途多蹇，生平際遇使人嘆息不已。阿貝爾一生貧病交迫，還得挑起家庭重擔，等到終受柏林大學當局賞識送來數學教授聘書前兩天，因肺結核病逝世，死時年方二十七歲。伽羅華的一生更為坎坷，年青時父親受迫害自殺而死，他自己兩度投考法國最負盛名的巴黎高等理工學院均落第，他每次把數學成果呈交法國科學院都受到漠視。適值他生當法國政治動蕩年代，他以滿腔熱情參加了共和派的活動，兩度因而被捕下獄，最後還在1832年5月30日早上一次不明不白的決鬥中被槍殺，死時二十一歲還不到。伽羅華的事迹是如此感人和不平凡，以致常遭有意無意的歪曲和渲染。要真正了解這位出類拔萃卻常遭受不公平待遇的年青人的內心境界，可不是容易的事。最常被人引述的故事，出於數學史家貝爾（Bell）的通俗名著《數學家的

故事》，尤其關於1832年5月29日晚上發生的事："時間不停地飛逝，他通宵不眠，爭分奪秒，匆忙地寫下他的科學遺囑。他預見到死亡會向他襲來，他要在臨死前把他大腦湧現出來的一些偉大的思想保存下來。他不時中斷自己的工作，在頁邊空白處潦草地寫着'我沒有時間了，我沒有時間了'，然後又繼續去寫那狂草式的下一個提綱。他在黎明前那一段令人絕望的最後時刻裏所寫下的東西，足以使好幾代數學家忙上數百年。他一勞永逸地求得了曾經折磨着數學家們達幾個世紀之久的一個謎的正確解。這個謎就是：在什麼條件下一個方程可解？"事實上，他當天晚上寫的文獻現在仍給保存着，頁邊的確潦草地書寫了一句話："這個證明需作補充，但我沒有時間了(作者注)。"而這句話就是整份文獻裏出現"我沒有時間了"的唯一地方。比較一下旁注的字體和文章的字體，還可看得出旁注是在匆忙中加上去，但文章卻不是在這種爭分奪秒的場合底下寫成的。伽羅華在1830年2月把成果寫成論文送交科學院秘書傅里葉(Fourier)，以參加科學院大獎評比，很不幸傅里葉在5月逝世，連文章也遺失了。在另一位法國數學家泊松(Poisson)的提議下，伽羅華把他的研究成果寫成一篇更長的論文，在1831年初再度送交科學院。因為文章寫得使人不易理解，泊松把它退回，勸告他再寫一份更詳盡的闡述。看來他在決鬥前夜整理的正是這份文章，為它添加說明，還囑咐好友舍瓦利葉(Chevalier)把它送到當時全歐最負盛名的德國數學家高斯和雅可比(Jacobi)那兒徵求他倆的意見。引用伽羅華自己的話："並非問他們這些定理是否正確，而是要求他們評價這

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	D	E	C
B	B	I	A	E	C	D
C	C	E	D	I	B	A
D	D	C	E	A	I	B
E	E	D	C	B	A	I

圖5.16

些定理的重要性。"

伽羅華的工作，中心思想大概是這樣子，對每一個N次方程他都找出某一組對方程N個根的置換，這些置換組成一個羣，叫做該方程的羣(嚴格地說，我們還得注意係數和根是在什麼範圍內取值的)。我們說置換組成羣，必須先弄清楚置換的結合是什麼(見第一節羣的定義)，那是相當自然的，舉一個簡單的情形為例吧，把x_1、x_2、x_3置換，共有六個，記作$I=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\x_1x_2x_3\end{pmatrix}$、$A=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\x_2x_3x_1\end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\x_3x_1x_2\end{pmatrix}$、$C=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\x_2x_1x_3\end{pmatrix}$、$D=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\x_3x_2x_1\end{pmatrix}$、$E=\begin{pmatrix}x_1x_2x_3\\x_1x_3x_2\end{pmatrix}$。先作$A$後作$C$的效果，是把$x_1$換作$\cancel{x_2}$ x_1，把x_2換作x_3，把x_3換作x_2，也就是E了，我們便記作$CA=E$。把全部結合關係寫下來，可列成一個表(圖5.16)。注意單是I、A、B三個置換組成一個羣，事實上它是方程$x^3-3x+1=0$(在有理數範圍內)的羣，而全部六個置換組成方程$X^3-2=0$(在有理數範圍內)的羣。為了紀念那位命途多蹇英年早逝的天才人物，我

們把一個方程的羣叫做它的伽羅華羣。方程是否可解，決定於它的伽羅華羣是否滿足某個特別的條件，順理成章地，滿足該條件的羣稱為可解羣。

伽羅華和阿貝爾的貢獻，主要還不在於答覆了高次方程是否可解這個問題，而在於他們為了解決這個問題引入的數學思想，撒下羣論的種子，它終於成為重要的數學概念。在這方面拉格朗日亦功不可沒，正是他指出根的置換這條新路向，引導伽羅華和阿貝爾竟其全功。置換羣是最先出現的具體的羣的例子，把這提煉成抽象羣的定義(就像在第一節見到的)，是過了二十年後英國數學家凱萊(Cayley)的功勞。但凱萊最初提出抽象羣的定義時，並沒有受到重視，直至再過三十年後，他在1878年捲土重來，陸續發表了幾篇關於抽象羣的文章，這次由於"時機成熟"，馬上吸引了數學家的注意。這是因為在那三十年間，在數學的各個領域裏，越來越多具體的羣的例子湧現出來，不是只局限於置換羣了。

3. 羣為什麼這樣有用?

籠統地說，羣就是對稱的數學，涉及對稱的事物也就涉及羣。這個世界充滿對稱的事物，最易明白的當然是幾何形狀的對稱了，例如各種花朵、蜂房、化學晶體、雪花、海星、……。但究竟什麼叫做圖形的對稱呢？我們可以這樣解釋：考慮平面(或空間)的所有移動，某些移動是不變更圖形的形狀，它們組成一個羣；結合關係是明顯的，一個移動緊跟一個移動，效果當然也是一個移動。這個羣的性質反映了

那個圖形的對稱性質，所以稱為那個圖形的對稱羣。譬如在第一節舉的頭一個例子，由I、R、V、H組成的羣其實是一個矩形的對稱羣。在第一節舉的第三個例子，由e、r、s、t、v、h、f、g組成的羣其實是一個正方形的對稱羣。後者比前者多元素，說明了正方形較矩形更對稱，這是符合直覺想像的。又例如梵文的萬字，它的對稱羣由e、r、s、t組成(如果容許v、h、f、g的話，萬字可要變成另一個意義完全不同的醜惡符號——納粹黨徽！)，雖然這個對稱羣也只有四個元素，但它的結構跟模4加羣相同，卻跟矩形的對稱羣有別，即是說矩形和梵文萬字的對稱性質不相同，這也符合直覺想像(圖5.17)。又譬如第二節裏提到的x_1、x_2、x_3的置換羣，其實是一個正三角形的對稱羣，只要把x_1、x_2、x_3看成是三角形的三個頂點就是了(圖5.18)。圓是平面圖形中最對稱吧，你猜它的對稱羣是什麼？任何繞中心的旋轉都是一個合法的移動，全部合起來，是個無限羣，與實數的加羣有相同的結構，因為旋轉的結合相當於旋轉角的相加。正四面體的對稱羣是什麼呢？利用對稱軸的想法是可以把它描述出

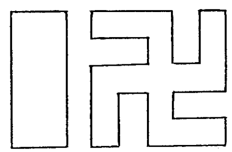

圖 5.17

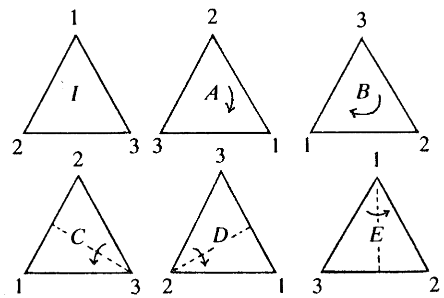

圖 5.18

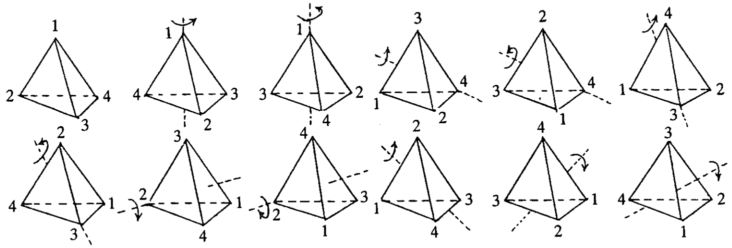

圖 5.19

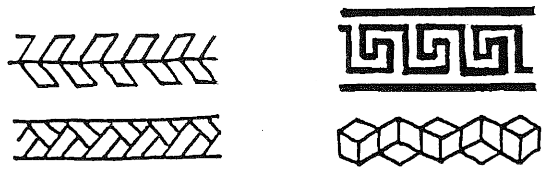

圖 5.20

來的，共有十二個元素，下面就是那些移動(圖 5.19)。

美術上經常運用對稱，就是羣的體現。例如敦煌壁畫的邊飾、服裝的帶飾、…，便是由一些無限羣的作用而得(圖 5.20)。最簡單的是單一個圖案的橫向重複，那是由平移生成的無限循環羣(與整數加羣的結構相同)做成；另一種是一個圖案與它的鏡像交錯形成的，是由兩個自乘得單位元的元素交錯地相乘生成的無限羣做成。密鋪平面的對稱圖案也是某些無限羣的體現，結晶體學家弗德洛夫(Fedorov)在 1891 年發現了只有十七個這樣的對稱羣，數學家波利亞(Polya)和尼格利(Nigeli)在 1924 年重新發現這個有趣的事實，即是説基本上只有十七種不同的鋪砌平面的圖案(圖 5.21)。中古的阿拉伯人在這方面很有心得，在西班牙的格蘭拿大有座阿

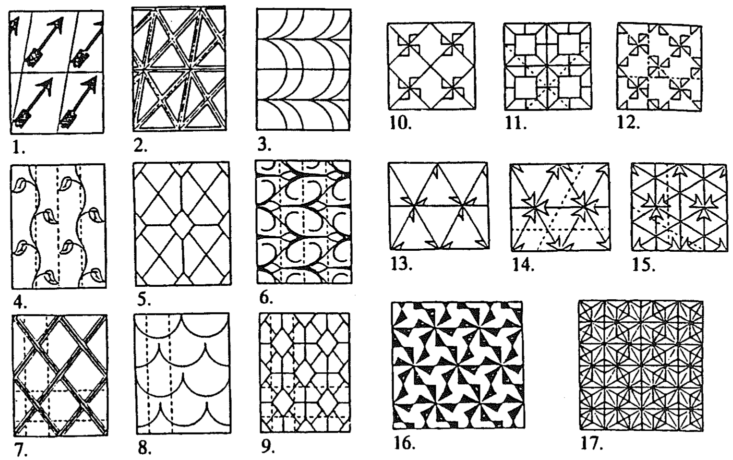

圖 5.21

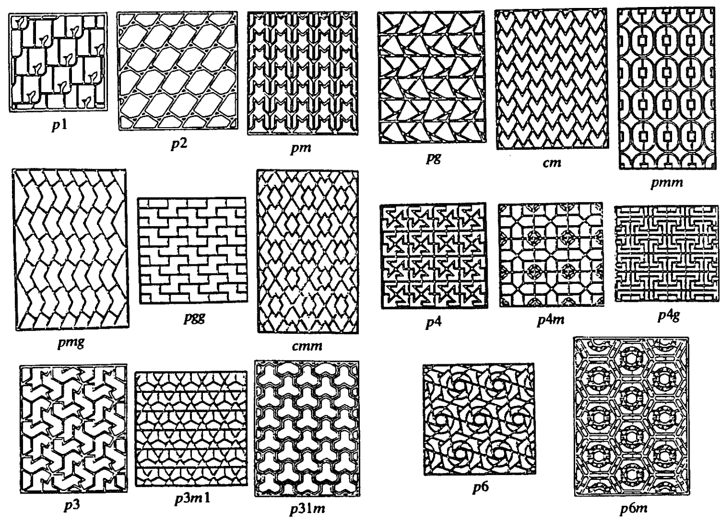

圖 5.22

罕伯拉宮，建於十四世紀，宮內地板和牆壁滿是這些平面圖案裝飾，有人算過，包括了十七種當中的十三種。中國以前糊紙的窗格，也包括了一些這些羣的體現(圖 5.22)。在埃及的一些回教寺的窗格，也可以見到這些羣的例子。但最富趣味的是近代荷蘭藝術家艾歇(Escher)創造的圖案畫，把這些對稱運用得出神入化，據説便是受了阿罕伯拉宮的圖案啟發的。例如他有幅著名的“天使與魔鬼”，由很多天使和魔鬼鑲嵌組成，基本上是由一個自乘四次是單位元的元素和一個自乘兩次是單位元的元素生成的羣做出的，這兩個元素之間還成立某種關係，以致結果相當於由鑲在正方形四邊的四面鏡所做成的鏡像，結晶體學家叫這個作 $p4g$ 羣(圖 5.23)。曾經有人指出艾歇的畫欠缺了十七種對稱羣中其中一個，即是結晶體學家叫做 $p31m$ 羣，相當於由鑲在正三角形三邊的三面鏡所做成的鏡像。艾歇聽後便創造了一幅“蜜蜂與黃蜂”，用的道理正是這一種對稱(圖 5.24)！

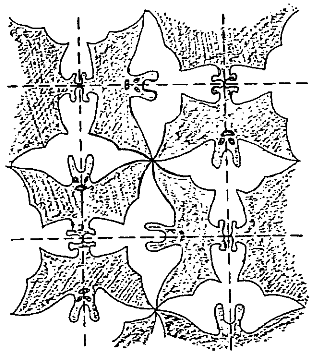

圖 5.23

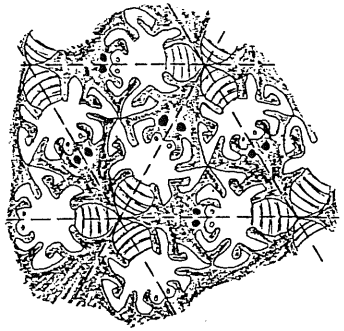

圖 5.24

幾何的對稱通過視覺可感受到，但有些對稱卻不是這樣子，就像第二節提到的方程的伽羅華羣，其實是反映了方程的對稱性質。羣在物理上的應用，也是基於對稱的思想，例如美國物理學家蓋爾曼(Gell-Mann)在1961年提出著名的“八度法”理論，便是利用羣論把基本粒子分類，研究它們的相互作用，預測了某些粒子的存在。果然，在1964年人們在實驗室找着 Ω-重子，證實了他的理論。後來他又基於“八度法”提出夸克理論。進一步理解基本粒子，這些重大貢獻，使他獲頒1969年度諾貝爾物理學獎。有一個與物理和羣有關的小故事，頗能發人深省：在1910年，普林斯頓大學的物理學教授金斯(Jeans)和數學教授維布倫(Veblen)討論課程改革，金斯提議去掉羣論，理由是它永遠不會對物理有用。我們不知道維布倫當時怎樣回答，只知道羣論繼續在課程上出現，也知道羣論已成為理論物理不可缺少的數學思想之一。我説這個小故事的用意，絕不是嘲笑金斯目光短淺和無知(我們自己何嘗不是常常犯這種錯誤)，只是帶出一個重要的教訓：對數學的用途，不要光憑目前的情況妄下斷語，數學的重要，不是光憑立竿見影的用途可以衡量的。

立體化學也需要羣論，除了上面提到的結晶體對稱羣，我再舉一個例子吧。譬如問碳原子的四個化學鍵掛上甲烷、乙烷、氫或氯的基，可以得到多少個不同的化合物分子呢？碳原子的四個化學鍵形如正四面體，所以問題跟正四面體的對稱羣有關，有些貌似不同的形狀其實是一樣的，一個可由另一個旋轉得到；但有些貌似相同的形狀卻又不一樣，一個是另一個的鏡像(圖 5.25)。波利亞在1937年建立了一套運

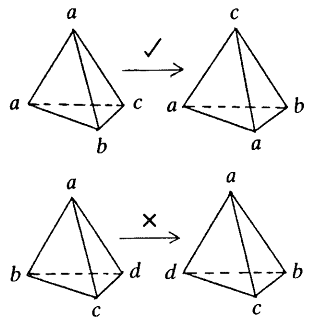

圖 5.25

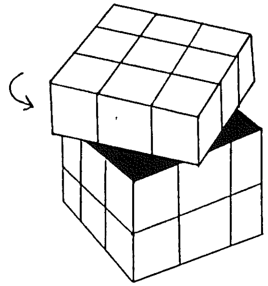

圖 5.26

用羣論的方法，解答了這類型的問題。譬如剛才的例子，算出來共有三十六個不同的化合物。

換一個較輕鬆的例子，就是一度風行世界各地的絞腦汁玩意"匈牙利魔方"(圖 5.26)，把它打亂後，利用幾種容許的扭動把它復原至每面的顏色是一樣。它也充滿羣論呢，涉及的也是一些置換，把一個形狀換作另一個，不過置換的數目可多了，共有 43 252 003 274 489 856 000 個，即使用一部每微秒(一百萬分之一秒)數一個的電腦，也得數上一百三十六萬多年！正因為置換的數目是這樣多，要從一個形狀變成另一個特定的形狀，中間只容許若干種扭動的方法(相當於生成該羣的元素)，是不能試圖僥倖的。

羣論也並非只與物理、化學、魔方或美術有關，以前已經提到，它對數學內部也起極大作用，滲透至各個數學領域。最著名的例子就是德國數學家克萊茵(Klein)在 1872 年任埃爾朗根大學數學教授席位時發表的就職講演，後來被稱為"埃爾朗根綱領"。他提出以羣來把幾何分類，每一種幾何

是研究一個集在某個變換羣的作用底下不變的性質，譬如歐幾里德幾何是研究剛體運動底下不變的性質，諸如長度、平行性、同等形、⋯，都包括在內。這種想法把當時(十九世紀後期)由於數學急劇發展而湧現出來一系列看似無關的幾何分支統一起來，是有重大的數學意義。在克萊茵作這個重要講演前三年，他的好友挪威數學家李(Lie)引進今天稱為李羣的東西。就像伽羅華以置換羣研究代數方程一樣，李以他創作的羣研究微分方程。自此以後，李羣成為分析、幾何、拓樸的重要工具。即使有限羣也不簡單呢，它和有限幾何、編碼理論、組合數學⋯⋯有很多關連。不要以為有限羣很容易研究，只是填一個結合表，譬如問："N 個元素的結合表有多少個？"也就是問 N 個元素的羣的結構是怎樣的？這問題困擾了數學家一百多年，直到 1980 年夏天才算基本上解答了，但據專家預測，整理善後的工作可要再忙上很多年呢！

大家見到了，羣充塞於天地間。羣的概念顯示了數學與其它學科之間、數學內部各領域之間、數學與現實世界之間的和諧。數學之美和數學之用，是渾為一體而不可分的。